



مرکز پیش دانشگاهی و دبیرستان
بانه العتسوم

به نام خدا

امتحان دیفرانسیل

نام و نام خانوادگی:

۴۰۱-۹۶۴۱۶

وقت امتحان: ۱

رشته: ریاضی

کلاس: چهارم

دانش آموز عزیز شما می توانید پاسخنامه امتحان را دو ساعت پس از پایان امتحان در پورتال مدرسه ملاحظه نمایید.

www.bagheralolum.sch.ir

ردیف	شرح سؤال	بارم
۱	اگر $xy = 0$ باشد، ثابت کنید $x = 0$ یا $y = 0$ است.	۱
۲	مجموعه جواب نامعادله $\left \frac{5-3x}{2} < 3 \right $ را به صورت بازه بنویسید.	۱
۳	نوع عدد اعشاری کسر $\frac{14}{90}$ را نوشته و کسر مولد عدد اعشاری $2/\overline{721}$ را بنویسید	۱
۴	ابتدا عدد همگرایی دنباله $a_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ را حدس بنزید. سپس حدس خود را با استفاده از تعریف همگرایی اثبات کنید.	۱/۵
۵	ثابت کنید دنباله $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است.	۱/۵
۶	کرانداری هر یک از دنباله‌های زیر را بررسی کنید.	۱/۵
	$a_n = n \sin(n\pi)$ $b_n = n \cos(n\pi)$ $c_n = \frac{n^x - 1}{2n}$	
۷	دنباله مقابل مفروض است: $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{6 - a_n}$ دنباله a_n به چه عددی همگرا است؟	۱/۵
۸	حاصل حدود زیر را در صورت وجود مناسبه کنید.	۱/۵
	الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^x - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-4}{x^2-2x} - \frac{x+2}{x^2+x} \right)$	
	ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sqrt{x}) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{8}$ د) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$	
	$\lim_{x \rightarrow 2} x-2 \cos \frac{1}{x^2-4}$	

۱/۵	$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که داشته باشیم	۹
۱/۵	مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع f در نقطه $x = 0$ باشد. $f(x) = \begin{cases} a + [x] & x < 0 \\ b & x = 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} & x > 0 \end{cases}$	۱۰
۱/۵	مجانب‌های قائم توابع زیر را مشخص کنید. $\text{الف) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \quad \text{ب) } g(x) = \operatorname{tg} x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$	۱۱
۱/۵	معادلات مجانب‌های مایل و افقی تابع زیر را در صورت وجود بنویسید. $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2x}$	۱۲

سؤال 1) $x=0 \rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ غير معرف

$x \neq 0 \rightarrow$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \rightarrow y = \frac{1}{x}$

سؤال 2) $-3 < \frac{2-3x}{r} < 3 \rightarrow -7 < 2-3x < 7 \xrightarrow{-2} -11 < -3x < 1 \xrightarrow{\cdot(-1)} x \in (-\frac{1}{3}, \frac{11}{3})$

سؤال 3) $\frac{12}{90} = \frac{v}{2\Delta} = \frac{v}{4\sqrt{3}\Delta}$ $v, \sqrt{3}\Delta = \frac{2\sqrt{3}\Delta - 2v}{99} = \frac{279\Delta}{99}$

سؤال 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ $|a_n - L| < \epsilon \rightarrow |2 - (\frac{1}{r})^n - 2| < \epsilon \rightarrow$

$(\frac{1}{r})^n < \epsilon \rightarrow r^n > \frac{1}{\epsilon} \rightarrow n > \log_r \frac{1}{\epsilon} \xrightarrow[n > M]{M \in \mathbb{N}} M \geq \lceil \log_r \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$

سؤال 5) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} \times \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$

$\left(\frac{\frac{n+r}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{n+r}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right) \textcircled{1}$

بما $r > 1$: $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n+1} \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2} \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right) \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ $\implies a_n$ متزايدة

سؤال 6) $a_n = n \sin(nr)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(nr) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \text{متذبذب} = \text{غير معرف}$

$b_n = n \cos(nr)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cos(nr) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \text{متذبذب} = \text{غير معرف}$

$c_n = \frac{n^r - 1}{r^n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^r}{r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r} = \infty$ \implies غير معرف

سؤال 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$

$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \sqrt{r - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \rightarrow L = \sqrt{r - L} \xrightarrow{(\cdot)^2} L^2 = r - L \rightarrow L^2 + L - r = 0$
 $(L+r)(L-r) = 0 \rightarrow L = -r \text{ أو } L = r \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r$

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1}$ (سؤال 8)

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 2x^2 - 2x^2}{x^2 + x - 2x^2 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x^2}{x^2 - 2x^2 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2}{-2x^2} = \frac{1}{2}$

ج) $= \sqrt{x} (\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}) = x (\pm \infty) = \pm \infty$

د) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}(9x^2) - 1 + \frac{1}{x}x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{8}{x}x^2 + \frac{1}{x}x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-8x + x}{x^2} = -\frac{7}{1} = -7$

هـ) $-1 < \cos \frac{1}{x^2 - 2} < 1$ $\xrightarrow{\text{بمبدأ المضروب}} \rightarrow \text{بمبدأ المضروب} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{ax+b} - 2 = 0 \rightarrow \sqrt{b} - 2 = 0 \rightarrow \sqrt{b} = 2 \rightarrow b = 4$ (سؤال 9)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+2} - 2}{x} = 1 \xrightarrow{\text{hosp}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+2}}}{1} = 1 \rightarrow \frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2$

$f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} (a + [x]) = a + [-0] = a - 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = 1$ (سؤال 10)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}, a = \sqrt{2} + 1$

الف) $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \text{ } \overline{\text{OUE}} \\ x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{2} \text{ } \overline{\text{بمبدأ المضروب}} \end{cases} \quad \text{ب) } \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ -\pi < x < \pi \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ } \overline{\text{بمبدأ المضروب}} \end{cases}$ (سؤال 11)

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x}) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x - \sqrt{x^2 + 2|x|}) =$ (سؤال 12)

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x}) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x}) = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty : y = -1 \text{ } \overline{\text{بمبدأ المضروب}} \\ x \rightarrow -\infty : y = 2x + 1 \text{ } \overline{\text{بمبدأ المضروب}} \end{cases}$